数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 49-56

HALPERN 型イテレーションに関する2つの最近の結果

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

本稿では, 筆者の最近の論文 [16, 17] に関する解説を書こうと考えている. これらの論文の中で, 筆者は非拡大写像の不動点への収束定理について論じている. 文献 [16] では Browder 型と Halpern 型と呼ばれるイテレーションについて, 文献 [17] では Halpern 型イテレーションについての新しい結果を証明している. この2つの文献のエッセンスを表現するために, Halpern 型イテレーションに話を絞ろうと思う. また, 細かい条件にも触れず, 多少大雑把に記述していこうと思っている.

なお, 講究録の趣旨には合わせるため, 通常の論文とは異なり, 筆者の主観的なコメントも記述している. この点について, ご容赦願いたいのと同時に, 楽しんでいただければ幸いである.

2. 準備

本稿を通して, $\mathbb{N}$ を自然数全体からなる集合とする.

Banach 空間 E の有界閉凸集合 C 上で定義された写像 T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは,

$$\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$$

がすべての $x,y\in C$ に対して成り立つことである. T を作用する前の2点間の距離に比べて, 作用した後の2点間の距離が — 文字通り — 拡大していない写像のことである. T の不動点集合を $F(T)$ と書く. すなわち

$$F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$$

である. 1965 年に Browder [2] は, E が Hilbert 空間のとき, $F(T)$ が空でないことを証明した. 文献 [1, 3, 6, 8] も参照のこと. 1967 年に Halpern [7] は次の収束定理を証明した.

キーワード. 非拡大写像, 不動点, Halpern 型イテレーション.
住所. 〒 804–8550 北九州市戸畑区仙水町 1–1 九州工業大学工学部数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

定理 1 (Halpern [7]). C を Hilbert 空間 E の有界閉凸集合とし, T を C 上で定義された非拡大写像とする. $u \in C$ を固定し, 数列 $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ を $\alpha_n = n^{-\theta}$ で定義する. ただし, $\theta \in (0,1)$ とする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) T x_n \tag{1}$$

で定義する. P を C から $F(T)$ への距離射影とする. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

この素晴らしい収束定理は次の 3 つの方向へ拡張された.

(a) 数列 $\{\alpha_n\}$ に関する条件の緩和
(b) 空間 E と集合 C に関する条件の緩和
(c) イテレーション (1) の拡張

Lions [9] は (a) 型の拡張をした. [9] での仮定は

(C1) $\lim_n \alpha_n = 0$
(C2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$
(C3) $\lim_n (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \,/\, \alpha_{n+1}^2 = 0$

である. (C1) と (C2) が必要条件であることは, Halpern [7] が証明しているので, 第 3 の条件をどこまで緩和できるのかというのが 1 つの研究テーマである (Reich [12] の問題 6). Wittmann [21] は (C1), (C2) そして

(C4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\, \alpha_{n+1} - \alpha_n \,| < \infty$.

という条件の下で, Xu [22, 23] は (C1), (C2) そして

(C5) $\lim_n (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \,/\, \alpha_{n+1} = 0$.

という条件の下で, Cho, Kang & Zhou [5] は (C1), (C2) そして

(C6) $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq o(\alpha_{n+1}) + \sigma_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$.

の下で収束定理を証明した. (C6) はこの中で最も弱い条件であるが, この条件をさらに緩和できるかどうかについては分かっていない. つまり, この問題は未だ解決されていない.

Reich [11] は (b) 型の拡張をした. さらに, Xu [22, 23] は次の拡張定理を証明した.

定理 2 (Xu [22, 23]). C を一様滑らかな Banach 空間 E の有界閉凸集合とし, T を C 上で定義された非拡大写像とする. $u \in C$ を固定し, 数列 $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ は (C1), (C2), (C5) を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と (1) で定義する. P を C から $F(T)$ への sunny nonexpansive retraction とする. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

ここで, 一様滑らかなBanach空間とは, $\|x\| = \|y\| = 1$ をみたすすべての $x, y \in E$ に対して,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + t\,y\| - \|x\|}{t}$$

が存在し, しかも一様に収束していることをいう. L^p 空間 (ただし, $1 < p < \infty$) が一様滑らかなBanach空間の代表例である. また, sunny nonexpansive retraction は, ある意味, Hilbert空間における距離射影のBanach空間版である. 詳細は文献 [18, 19] 等を参照のこと.

Moudafi [10] は (c) 型の拡張をした. これについては第4節で述べる.

この節の最後に, Halpern型の収束定理を得る際によく使われる補助定理を述べる.

補助定理 1 (Weng [20]). 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, $\{\beta_n\} \subset [0,\infty)$, $\{\gamma_n\} \subset [0,\infty)$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \quad \gamma_{n+1} \le (1-\alpha_n)\,\gamma_n + \alpha_n\,\beta_n$$

を満たすとする. このとき, $\{\gamma_n\}$ は0に収束する.

3. Reichの問題の実質的解決

既に述べたように第3の条件に関するReichの問題は, 今現在も未解決である. 筆者は文献 [17] において, 次の定理を証明し, Reichの問題の実質的な解決をした.

定理 3 ([17]). E, C, T, P そして u は定理2と同じとする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は (C1) と (C2) を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n\,u + (1-\alpha_n)\big(\lambda T x_n + (1-\lambda)\,x_n\big) \tag{2}$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

定理 4 ([17]). 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ に対して, 以下は同値である.

- $\{\alpha_n\}$ は (C1) と (C2) を満たす.
- E, C, T, P そして u は定理1と同じとする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と (2) で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は Pu へ強収束する.

すなわちイテレーション(2)に対する必要十分条件は「(C1)かつ(C2)」であることが分かった. 定理3を証明するために本質的な役割を果たしたのは, 次の補助定理である.

補助定理 2 ([14, 15]). $\{z_n\}, \{w_n\}$ を Banach 空間 E 内の有界な点列とし, $\{\alpha_n\}$ を区間 $[0,1]$ 内の数列とする.

- すべての $n \in \mathbb{N}$ について, $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n) z_n$
- $\limsup_n \left(\|w_{n+1} - w_n\| - \|z_{n+1} - z_n\|\right) \leq 0$
- $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$

を仮定する. このとき, $\lim_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

また, Chidume & Chidume の論文 [4] において定理3と同様の結果が証明されていることを, 筆者は後に知った. 論文 [4] の投稿日が2005年5月17日, 筆者の論文 [17] の投稿日が2005年3月1日なので, 筆者の方が2ヶ月半ほど早いが, ほぼ同じ時期に同じ定理を証明したことになる. しかも彼らも同じ補助定理(補助定理2)を用いて証明している.

4. Moudafi による拡張

Moudafi [10] は定理1の素晴らしい拡張定理を証明した. (a)型, (b)型の拡張は, ある意味, 誰でも思いつくことであるが, 彼はイテレーションの形を変えることで拡張している. しかも, convex optimization, linear programming, monotone inclusion そして elliptic differential equation へ応用できることを示した. さらに, Xu [24] は次のように再拡張した.

定理 5 (Xu [24]). E, C, T, P そして $\{\alpha_n\}$ は定理2と同じとする. Φ を C 上の縮小写像とし, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n \Phi x_n + (1-\alpha_n) T x_n \tag{3}$$

で定義する. $z \in C$ を縮小写像 $P \circ \Phi$ の唯一の不動点とする. このとき, $\{x_n\}$ は z へ強収束する.

注意. z は T の不動点である. また, すべての $x \in C$ について $\Phi x = u$ のとき, (3) は (1) と一致する.

Xu の証明は大変技巧的で, 感動したのを今でも覚えている. 筆者には彼の発想の源が全く分からず, 「なぜ, このような証明を思いつくことができたのだろうか」という疑問を持った. 筆者にも理解できる証明はないか, と探したところ, 意外にも, 次の非常に簡潔な別証明を得ることができた.

定理 5 の別証明 ([16]). Φ は縮小写像なので, 実数 $r \in [0,1)$ が存在して, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|\Phi x - \Phi y\| \leq r\|x-y\|$ を満たす. 点列 $\{y_n\} \subset C$ を $y_1 \in C$ と $y_{n+1} = \alpha_n \Phi z + (1-\alpha_n) T y_n$ で定義する. 定理 2 により, $\{y_n\}$ は $P \circ \Phi z$, すなわち z に収束する. すべての $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - y_{n+1}\| \\
&\leq (1-\alpha_n)\|Tx_n - Ty_n\| + \alpha_n \|\Phi x_n - \Phi z\| \\
&\leq (1-\alpha_n)\|x_n - y_n\| + \alpha_n r\|x_n - z\| \\
&\leq (1-\alpha_n + \alpha_n r)\|x_n - y_n\| + \alpha_n r\|y_n - z\| \\
&= (1-\alpha_n + \alpha_n r)\|x_n - y_n\| + (\alpha_n - \alpha_n r)\frac{r\|y_n - z\|}{1-r}
\end{aligned}$$

が成立する. 補助定理 1 により, $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ を得る. つまり $\lim_n \|x_n - z\| = 0$ が証明された. □

この別証明は, 実は, 次の定理の証明にもなっている.

定理 6 ([16]). C を Banach 空間 E の閉凸集合とする. T を C 上で定義された非拡大写像とし, Φ を C 上の縮小写像とする. 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は (C1) と (C2) を満たしているとする. 以下の仮定をする:

- すべての $u \in C$ に対して, $u_1 = u$ と $u_{n+1} = (1-\alpha_n) T u_n + \alpha_n u$ で定義される点列 $\{u_n\} \subset C$ は強収束する.

この収束先を Pu で表す. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と (3) で定義する. $z \in C$ を縮小写像 $P \circ \Phi$ の唯一の不動点とする. このとき, $\{x_n\}$ は z へ強収束する.

注意. この定理を平たく言うと, Halpern 型の収束定理が成立すれば, 自動的に Halpern-Moudafi 型の収束定理も成立することを意味する. また, 命題に関しては次の 2 つの事柄に注意する必要がある.

(i) Pu を定義する際, 初期点 u_1 は u である必要はない. つまり, Pu は初期点には依存しない.

(ii) P は C 上の非拡大写像になる.

証明. 既に述べたように, 証明の本質的な部分は終わっている. 「注意」の 2 つの事柄について証明しよう. まず (i) について. $u \in C$ を固定し, 初期点のみが異なる 2 つの点列 $\{u_n\}, \{y_n\} \subset C$ を $u_1 = u$, $y_1 \in C$ そして

$$u_{n+1} = (1-\alpha_n) T u_n + \alpha_n u, \qquad y_{n+1} = (1-\alpha_n) T y_n + \alpha_n u$$

で定義する. このとき,

$$\|u_{n+1} - y_{n+1}\| \leq (1-\alpha_n)\|Tu_n - Ty_n\| \leq (1-\alpha_n)\|u_n - y_n\|$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立するので, 補助定理1により, $\lim_n \|u_n - y_n\| = 0$ を得る. すなわち, 収束先は初期点に依存しない. 次に (ii) を示す. $v \in C$ を固定し, 点列 $\{v_n\} \subset C$ を $v_1 = v$ と

$$v_{n+1} = (1-\alpha_n) Tv_n + \alpha_n v$$

で定義する. このとき,

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - v_{n+1}\| &\leq (1-\alpha_n)\|Tu_n - Tv_n\| + \alpha_n \|u - v\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|u_n - v_n\| + \alpha_n \|u - v\| \end{aligned}$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ で成立する. この不等式と $u_1 = u$, $v_1 = v$ より, 数学的帰納法を用いて, $\|u_n - v_n\| \leq \|u - v\|$ を証明することができる. すなわち $\|Pu - Pv\| \leq \|u - v\|$ が言える. □

定理6によって, (c) 型の拡張定理に関する研究は完全に終わったことになる. なお, 論文 [16] では, 写像族に関する収束定理を意識して, もう少し一般的な設定で証明している. 詳細は文献を参照のこと.

定理3と定理6により, 以下の定理が — 自動的に — 導かれる.

定理 7. E, C, T そして P は定理2と同じとする. Φ を C 上の縮小写像とする. λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし, 数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は (C1) と (C2) を満たすとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ と

$$x_{n+1} = \alpha_n \Phi x_n + (1-\alpha_n)\big(\lambda T x_n + (1-\lambda) x_n\big) \tag{4}$$

で定義する. $z \in C$ を縮小写像 $P \circ \Phi$ の唯一の不動点とする. このとき, $\{x_n\}$ は z へ強収束する.

5. まとめ

Halpern の収束定理 (定理1) には, (a) 型, (b) 型, (c) 型の3つの拡張の方向がある. (c) 型については完全に解決された. (a) 型については, 実質的には解決されたが, 未だ未解決の部分がある. (b) 型については, Browder 型収束との関係が分かっている [13, 17]. しかし, 完全な解決のための糸口は未だ見えていない.

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach. I, II.* (in French), Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1978–1979), Exp. No. 7-8, 45 pp., École Polytech., Palaiseau, 1979.

[2] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272–1276.

[3] ———, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044.

[4] C. E. Chidume and C. O. Chidume, *Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **318** (2006), 288–295.

[5] Y. J. Cho, S. M. Kang and H. Zhou, *Some control conditions on iterative methods*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., **12** (2005), 27–34.

[6] D. Göhde, *Zum Prinzip def kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr., **30** (1965), 251–258.

[7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.

[8] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004–1006.

[9] P.-L. Lions, *"Approximation de points fixes de contractions"*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **284** (1977), A1357–A1359.

[10] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl., **241** (2000), 46–55.

[11] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.

[12] ———, *Some problems and results in fixed point theory*, Contemp. Math., **21** (1983), 179–187.

[13] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3641–3645.

[14] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123.

[15] ———, *Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals*, J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239.

[16] ———, *Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl., **325** (2007), 342–352.

[17] ———, *A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 99–106.

[18] 高橋渉, "非線形関数解析学", 近代科学社 (1988).

[19] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[20] X. Weng, *Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping*, Proc. Amer. Math. Soc., **113** (1991), 727–731.

[21] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel), **58** (1992), 486–491.

[22] H. K. Xu, *Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **65** (2002), 109–113.

[23] ———, *Iterative algorithms for nonlinear operators*, J. London Math. Soc., **66** (2002), 240–256.

[24] ———, *Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **298** (2004), 279–291.